1.8 Určitý integrál

238. Pomocí teorie Riemannova integrálu a Newton – Leibnizovy formule vypočtěte

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots n^p}{n^{p+1}},\quad p>0.$$

239. (Příklad řešený v K1.) $\displaystyle\int_0^{10\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

240. (Příklad řešený v JI.) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$.

241. Vypočtěte plochu elipsy a obvod kruhu.

242. Vypočtěte objemy kužele, koule a prstence (anuloidu).

243. Vypočtěte délku:

a) Grafu funkce $f(x)=x^{3/2}$, $x\in[0,4]$.
b) Grafu funkce $f(x)=e^x$, $x\in[0,a]$.
c) Části Archimedovy spirály zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r=a\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$, kde $a>0$ je parametr.

***244.** Nechť f,g,g' jsou funkce spojité na $[a,b]$ a g je neklesající a nezáporná na $[a,b]$. Dokažte, že existuje $\xi\in[a,b]$ takové, že

$$\int_a^b fg=g(a)\int_a^{\xi} f.$$

245. Nechť f je spojitá funkce na $[0,1]$ a $0<a<b$. Vypočtěte

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Vyšetřete konvergenci (čili existenci) a případně i absolutní konvergenci následujících nevlastních Riemannových (Newtonových) integrálů.

246. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,dx.$

247. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

248. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^p}\,dx.$

249. $\displaystyle\int_7^\infty\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx.$

250. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x\,dx$, $p,q\in\mathbb{R}$.

252. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}$, $p,q\in\mathbb{R}$.

254. $\displaystyle\int_0^\infty\left(\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)x^{-a}\,dx$, $a\in\mathbb{R}$.

256. $\displaystyle\int_0^\infty u\cos u^4\,du.$

258. $\displaystyle\int_1^\infty x^p\sin(x+\ln x)\,dx.$

260. (Příklad řešený v K1.)

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x^p\ln^q x},\quad p,q\in\mathbb{R}.$$

262. Dokažte, že $\int_0^{\pi/}$

Návod:
(a) Použijte substituci $x =$
(b) $\ln(\sin 2t)$ napište přiroz
(c) $\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t)\,dt$ počítejt

263. Pomocí výsledku předch

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx,$$

264. Vypočtěte derivaci funk

265. Dokažte, že $\int_0$

***266.** Nechť f je nerostoucí s $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Dokažte, že pak f

Následující dva důležité p

250. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \, dx$, $p, q \in \mathbb{R}$.

251. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\frac{1}{x}) \operatorname{arctg} x}{x} \, dx$.

252. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

253. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \operatorname{tg}^p x \, dx$.

254. $\displaystyle\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) \, x^{-a} \, dx$, $a \in \mathbb{R}$.

255. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} \, dx$.

256. $\displaystyle\int_0^\infty u \cos u^4 \, du$.

257. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^a} \, dx$, $a \in \mathbb{R}$.

258. $\displaystyle\int_1^\infty x^p \sin(x + \ln x) \, dx$.

****259.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^a \sin^2 x}$, $a \in \mathbb{R}$

260. (Příklad řešený v K1.)

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

261. (Příklad řešený v K1.)

$$\int_2^\infty \frac{\sin x}{x + 2\sin x} \, dx.$$

262. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Návod:
(a) Použijte substituci $x = 2t$.
(b) $\ln(\sin 2t)$ napište přirozeně jako součet tří členů.
(c) $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) \, dt$ počítejte pomocí substituce $t = \pi/2 - u$.

263. Pomocí výsledku předchozího příkladu vypočtěte integrály

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

264. Vypočtěte derivaci funkce $\displaystyle g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} \, dt$.

265. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} \, dt \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$, $x \to \infty$.

***266.** Nechť f je nerostoucí spojitá funkce na intervalu $[1, \infty)$ a nechť konverguje $\int_0^\infty f(x) \, dx$. Dokažte, že pak $f(x) = o(1/x)$, $x \to \infty$.

Následující dva důležité příklady jsou řešeny v JI.